Université Sultan Moulay Slimane
Faculté polydisciplinaire
Khouribga

A. U. 2020-2021
Filière: SMA/SMI
Responsable: N. Mrhardy

Examen: Suites numériques et fonctions
Durée: 1h30

Numéro d'examen	Nom et prénom: corrigé	Note
	Salle: .... Matricule:	....../20

- Les documents et téléphones portables sont formellement interdits.
- Les calculatrices sont à usage personnel.

Question 1.(*3pts*)
Soient A et B deux ensembles de $\mathbb{R}^{+*}$. On pose $A.B = \{a \times b; \quad a \in A, b \in B\}$. Montrer que

$$\sup(A.B) = \sup A \times \sup B.$$

• Soit $x \in A.B$ alors $x = a \times b$, $a \in A$ et $b \in B$
On a : $0 < a \leq \sup A$ et $0 < b \leq \sup B \Rightarrow x = ab \leq \sup A \times \sup B$
d'où : $\sup A \times \sup B$ est un majorant de $A.B$ et donc
$\boxed{\sup(A.B) \leq \sup A \times \sup B}$ $(*)$

• Soient $a \in A$ et $b \in B$ / $a.b \in A.B$, alors :
$a.b \leq \sup(A.B)$ et $b > 0 \Rightarrow a \leq \frac{\sup(A.B)}{b} \in \mathcal{M}(A)$
alors $\sup A \leq \frac{\sup(A.B)}{b} \Rightarrow b \leq \frac{\sup(A.B)}{\sup A} \in \mathcal{M}(B)$
donc $\boxed{\sup B \times \sup A \leq \sup(A.B)}$ $(**)$
$(*)$ et $(**)$ implique $\sup(A.B) = \sup A \times \sup B$

Question 2.(*4pts*)
Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure, si elles existent, des ensembles suivants

$$\mathrm{M} = \{a + (-1)^n b,\ n \in \mathbb{N}\}, (a, b \geq 0), \quad \mathrm{N} = \{a + \frac{b}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}, (a, b \geq 0)$$

• Selon la parité de n on a : $M = \{a-b, a+b\}$
Comme $a, b > 0$ alors $a - b < a + b$
donc $\sup M = a + b$ et $\inf M = a - b$

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $a \leq a + \frac{b}{n} \leq a + b$ et $a + b \in N$ ($n = 1$)
donc $\boxed{\sup N = a + b}$
d'autre part on a (i) $a \in \mathcal{M}(N)$
(ii) soit $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}^* / b < n\varepsilon \Rightarrow \frac{b}{n} < \varepsilon$
$\Rightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* / a + \frac{b}{n} < a + \varepsilon$
Par la caractérisation de la borne inf, on a $\boxed{\inf N = a}$.

Question 3.(*3pts*)
Montrer que l'application $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.
(On poutra utiliser $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^+$).

Soit $\varepsilon > 0$ On pose $\eta = \varepsilon^2 > 0$

alors si $|x - y| \leq \eta$ on aura

$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} \leq \sqrt{\eta} = \varepsilon$

d'où $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta (= \varepsilon^2) > 0 / |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

C/C : f est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$

Exercice 1.(*5pts*) Soit $a > 0$. On définit les suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ par

$$x_n = (1 + a)(1 + a^2) \dots (1 + a^n), \qquad y_n = a + a^2 + \dots + a^n$$

1. Montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante.

Comme $x_n > 0$ $\forall n$ on calcule :

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+a) \cdots (1+a^n)(1+a^{n+1})}{(1+a) \cdots (1+a)^n} = 1 + a^{n+1} > 1 \quad (a > 0)$$

donc $(x_n)_n$ est croissante

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $(y_n)_n$ puis déduire que si $0 < a < 1$ alors (y_n) est majorée.

$(y_n)_n$ est la somme de terme d'un suite géométique
donc :

$$y_n = a \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

Comme $0 < a < 1 \Rightarrow 1 - a^n \leq n$ donc $y_n \leq \frac{a}{1-a}$
d'où $(y_n)_n$ est majorée

3. Montrer que pour tout $x > 0$, $1 + x < e^x < xe^x + 1$

soit $f(t) = e^t$, $t \in [0, x]$

f continue, dérivable sur $[0, x]$, $\forall x > 0$ donc

d'après T.A.F : $\exists c \in]0, x[$ tel que

$\frac{e^x - 1}{x} = e^c$, or $0 < c < x \Rightarrow 1 < e^c < e^x$

et donc $1 < \frac{e^x - 1}{x} < e^x \Rightarrow x + 1 < e^x < xe^x + 1$.

4. En déduire que si $0 < a < 1$ alors $(x_n)_n$ est convergente.

d'après (3) on a

$$\left.\begin{array}{l} 1 + a < e^a \\ 1 + a^2 \leq e^{a^2} \\ \vdots \\ 1 + a^n \leq e^{a^n} \end{array}\right\} (\times) \Rightarrow x_n \leq e^a \times \dots \times e^{a^n}$$

donc $x_n \leq e^{a + \dots + a^n} = e^{y_n} \leq e^{\frac{a}{1-a}}$ (d'après e)

On obtient que $(x_n)_n$ est majorée, de plus elle est croissante donc $(x_n)_n$ est convergente.

Exercice 2.(5*pts*) On appelle **cosécante hyperbolique** la fonction, notée **cosech**, et définie par

$$cosech(x) = \frac{1}{\sinh(x)} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

1. Déterminez l'ensemble de définition D de la fonction ***cosech*** puis calculer les limites sur ses bornes.

• on a $\sinh x = 0$ ssi $x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}^*$

• $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{cosech} x = 0$ et $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{cosech} x = 0$

• $\lim\limits_{0^+} \operatorname{cosech} x = \lim\limits_{0^-} \frac{2}{e^x(1 - e^{-2x})} = +\infty$ (car si $x > 0$, $1 - e^{-2x} > 0$).

• $\lim\limits_{0^-} \operatorname{cosech} x = \lim \frac{2}{e^x(1 - e^{-x})} = -\infty$ (car si $x < 0$, $1 - e^{-2x} < 0$).

2. Etudiez la dérivabilité de la fonction ***cosech*** et exprimez sa dérivée en fonction de tanh et ***cosech***.

• on a $x \longmapsto \sinh x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$

• $x \longmapsto \frac{1}{x}$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

par composition cosech dérivable sur $\mathbb{R}^*$

et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $cosech'(x) = \frac{-\cosh x}{(\sinh x)^2} = \frac{-ch x}{sh x} \times \frac{1}{sh x}$

$\boxed{cosech'(x) = -\frac{1}{th x} \cdot cosech x}$

3. Montrez que la restriction de $cosech$ à l'intervalle $]0, +\infty[$ induit une bijection sur un intervalle J à préciser. On note $Argcosech$ sa bijection réciproque.

$\forall x \in]0,+\infty[$; $sh x > 0$ et $th x > 0$ donc
$\forall x \in]0,+\infty[$ $cosech'(x) < 0$
c.à.d $cosech$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

On a alors cosech est continue ; strictement croissante sur $]0,+\infty[$ alors d'après théorème de la bijection elle est bijective de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $J =]0,+\infty[$ (d'après les limites dans (1).)

4. Donnez l'ensemble de dérivabilité de $Argcosech$. Puis montrer que

$$(Argcosech(x))' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in]0,+\infty[$$

Indication: *On pourra montrer que:* $\tanh(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+cosech^2(x)}}, \quad \forall x \in]0,+\infty[$

Comme $cosech'(x) \neq 0$, $\forall x \in]0,+\infty[$ alors d'après théorème de la bijection, argument cosech est dérivable sur $]0,+\infty[$; de plus :

$$(arg\,cosech\,x)' = \frac{1}{cosech'(argcosech\,x)} = -\frac{th(argcosech\,x)}{cosech(argcosech\,x)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+cosech^2(argcosech\,x)}} \times \frac{1}{x}$$

$$= -\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}, \quad \forall x \in]0,+\infty[$$